ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Колебания – процессы (движения или изменения состояния), обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

- **Положение равновесия** – положение, вблизи которого совершаются колебания.

- Система, совершающая колебания, называется **колебательной**.

По характеру физических процессов:

- ***Механические*** колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, сооружений, волнение жидкостей
- ***Электромагнитные*** колебания переменного электрического поля в цепи, колебания векторов ***E*** и ***B***
- ***Электромеханические*** колебания мембраны телефона, диффузора электродинамика

По характеру зависимости от времени:

- ***Периодические***
- ***Непериодические***

По способу возбуждения колебаний:

- ***Свободные***
- ***Вынужденные***
- ***Параметрические***
- ***Автоколебания***

- **Свободные** (или собственные) колебания – такие колебания, которые совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.
- **Вынужденными** называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.
- **Автоколебания** сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием.
- При **параметрических** колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы.

- Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени.

  Периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний.

- **Гармонические колебания** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса

$$s = A cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad s = A sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A – максимальное значение колеблющейся величины, называется **амплитудой** колебаний, ω_0 – **круговая (циклическая) частота**, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебаний** в момент времени t.

- **Периодом колебаний** (T) называется наименьший промежуток времени, через который повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение.

Значения функций косинуса и синуса повторяются при изменении аргумента на 2π. За промежуток времени, равный периоду T, фаза колебания получает приращение 2π:

$$\omega_0(t+T)+\varphi_0 = (\omega_0 t+\varphi_0)+2\pi \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

- **Частота** периодических колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Единица измерения частоты - герц (1 Гц = 1 / с)

Гармонические колебания

- Рассмотрим прямолинейные гармонические колебания материальной точки вдоль оси x около положения равновесия, совпадающего с началом координат $x = 0$.

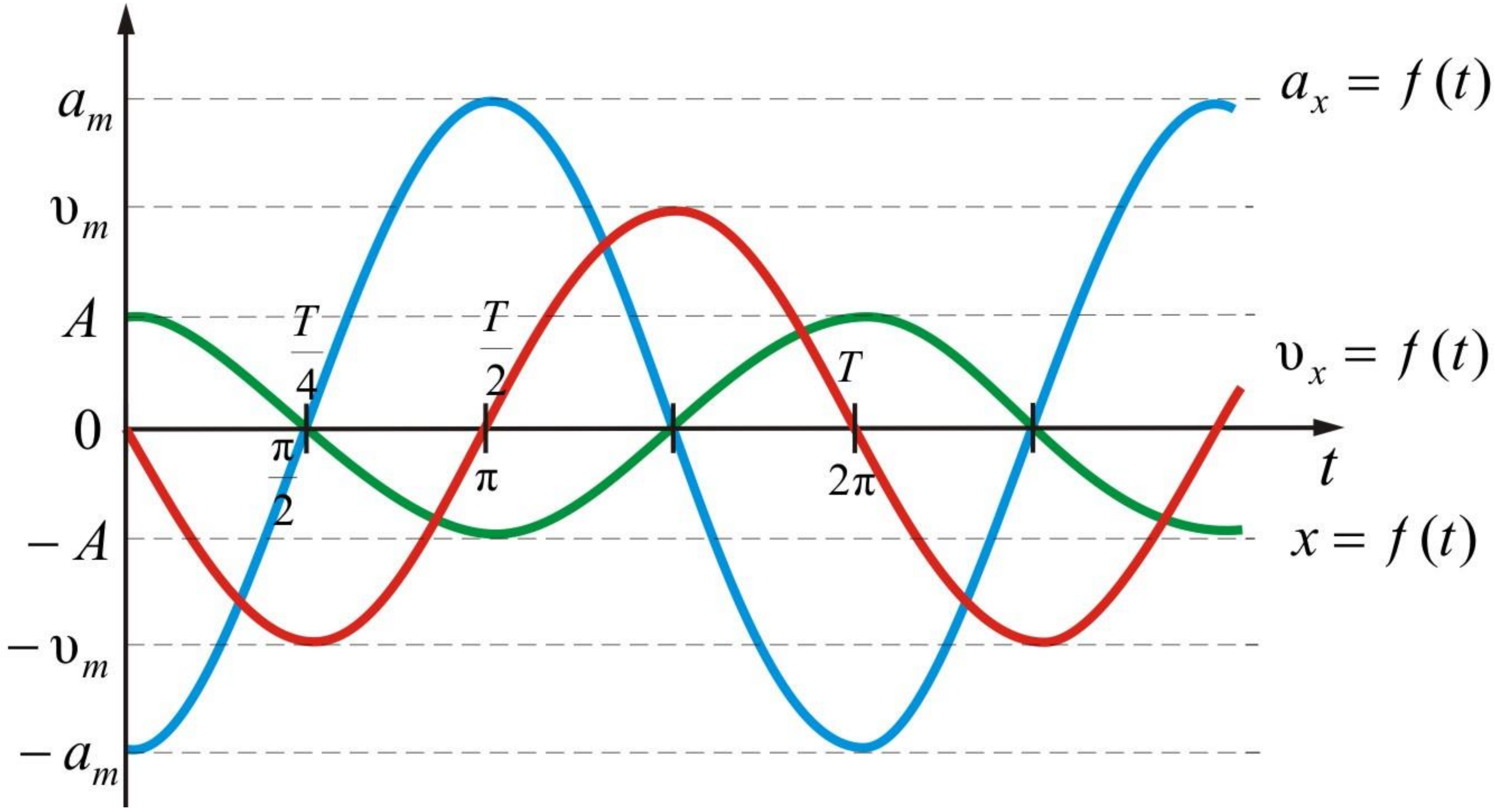
  Зависимость координаты x от времени t задается уравнением

$$x = Acos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Тогда

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$



a_m
υ_m
A
0
$-A$
$-\upsilon_m$
$-a_m$
$\frac{T}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{T}{2}$
π
T
2π
t
$a_x = f(t)$
$\upsilon_x = f(t)$
$x = f(t)$

$$F = ma = -m\omega_0^2 x$$

- модуль силы пропорционален смещению материальной точки из положения равновесия;
- направления силы и смещения противоположны.

Такие силы называют **возвращающими**.

Данная зависимость характерна для **упругой** силы.

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

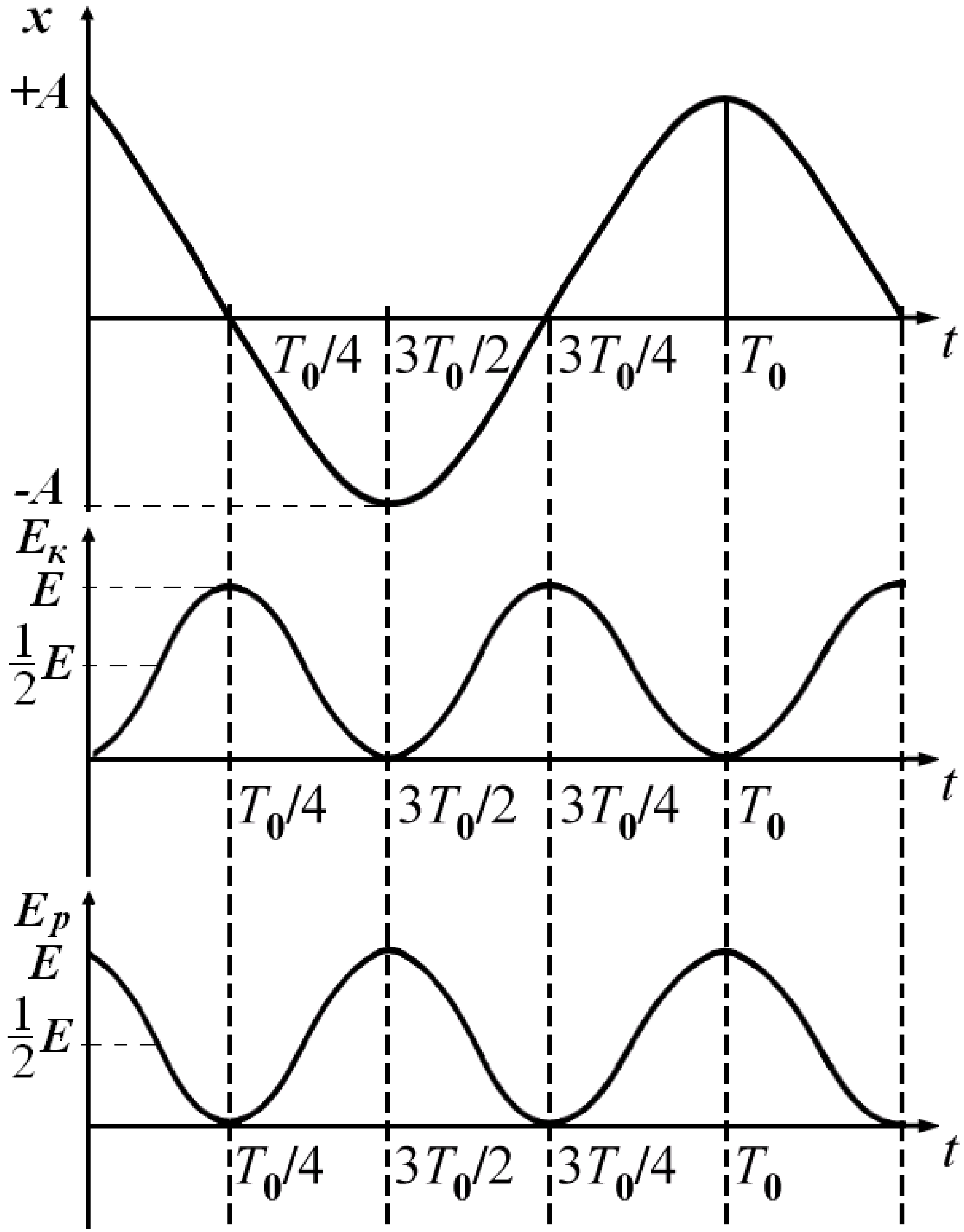
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\big(1 - cos2(\omega_0 t + \varphi_0)\big).$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F:

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\big(1 + cos2(\omega_0 t + \varphi_0)\big).$$

Тогда полная энергия:

$E = E_k + E_p = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = const,$ где $k = m\omega_0^2$



x
+A
-A
t
T0/4
3T0/2
3T0/4
T0
Eк
E
1/2 E
t
T0/4
3T0/2
3T0/4
T0
Ep
E
1/2 E
t
T0/4
3T0/2
3T0/4
T0

Гармонический осциллятор

- **Осциллятор** – система, совершающая свободные колебания.

Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Решение этого уравнения:

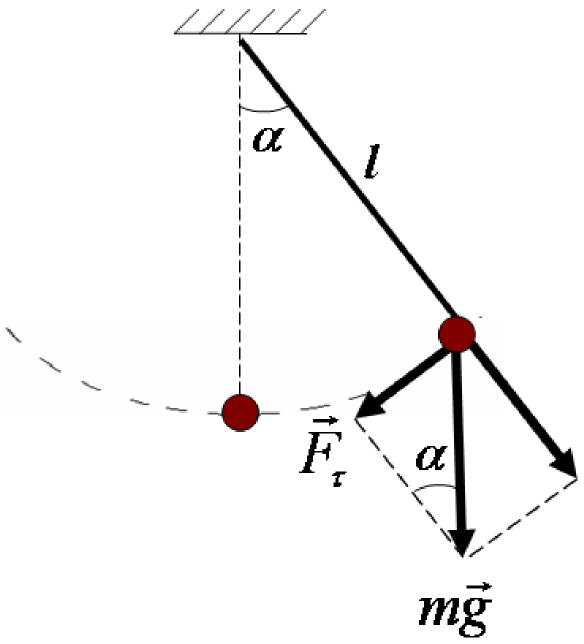
$$x = Acos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Математический маятник

- Идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и совершающей колебания под действием силы тяжести.

$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} sin\alpha = 0$, примем $sin\alpha \approx \alpha$, тогда

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$



Следовательно:

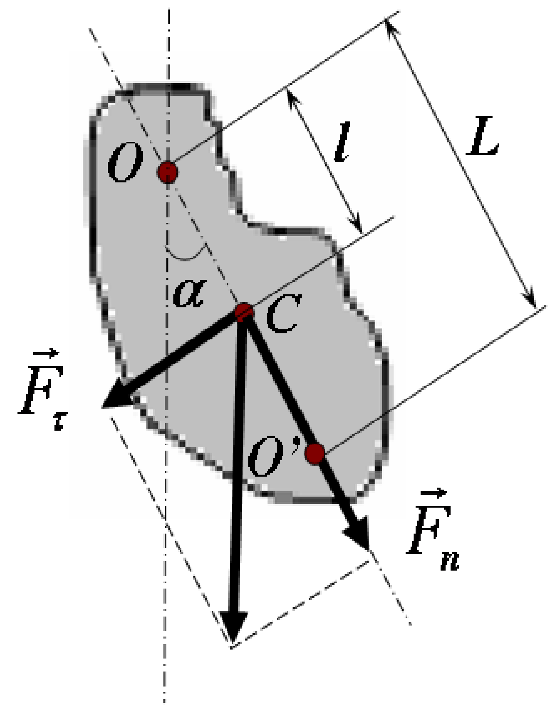
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Физический маятник

- Твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс тела C. Точку O называют точкой подвеса.

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0$$



Следовательно:

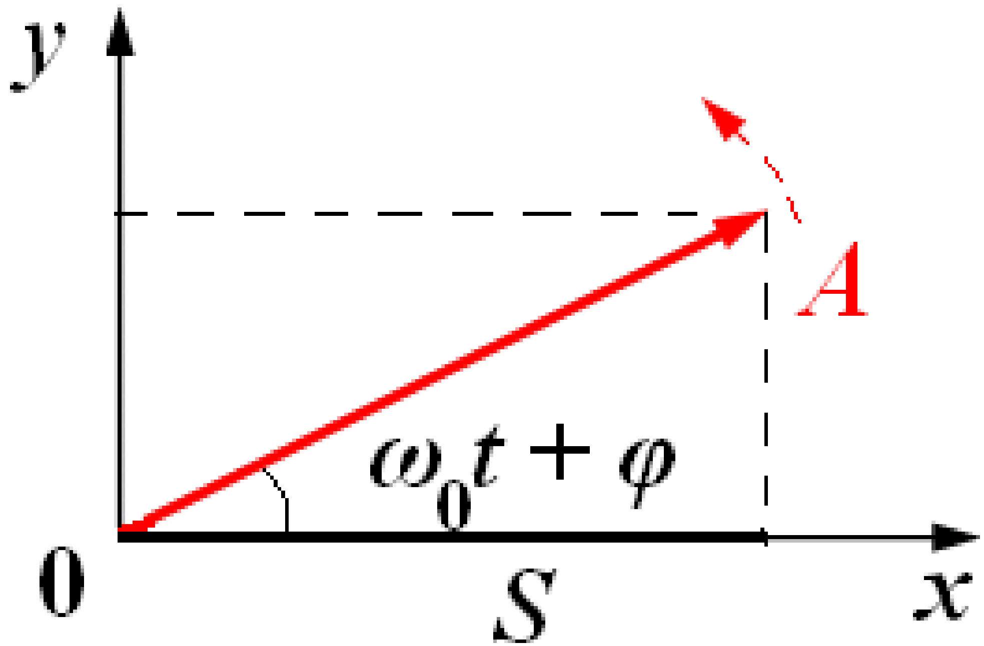
$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$ или

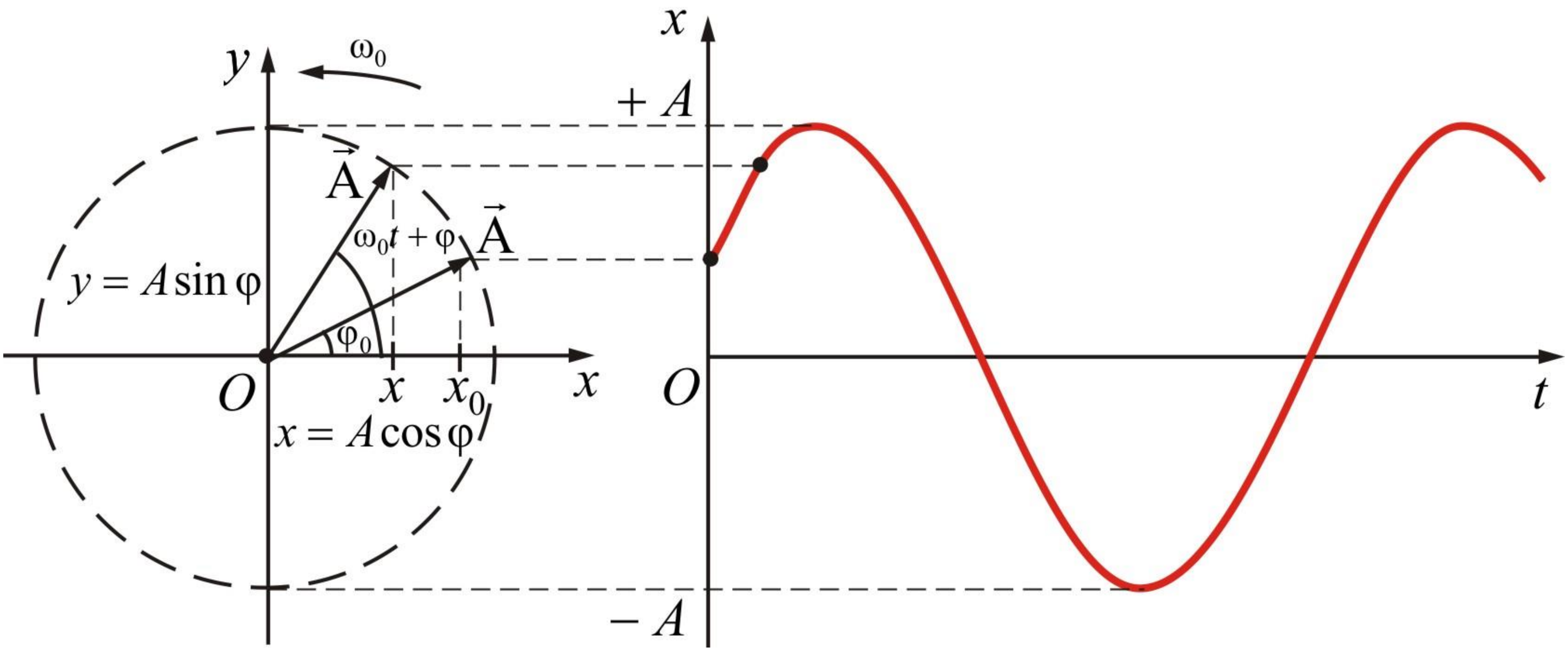
$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, где L – приведенная длина

физического маятника, $L = \frac{I}{ml}$.

Сложение гармонических колебаний

Способ представления колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды



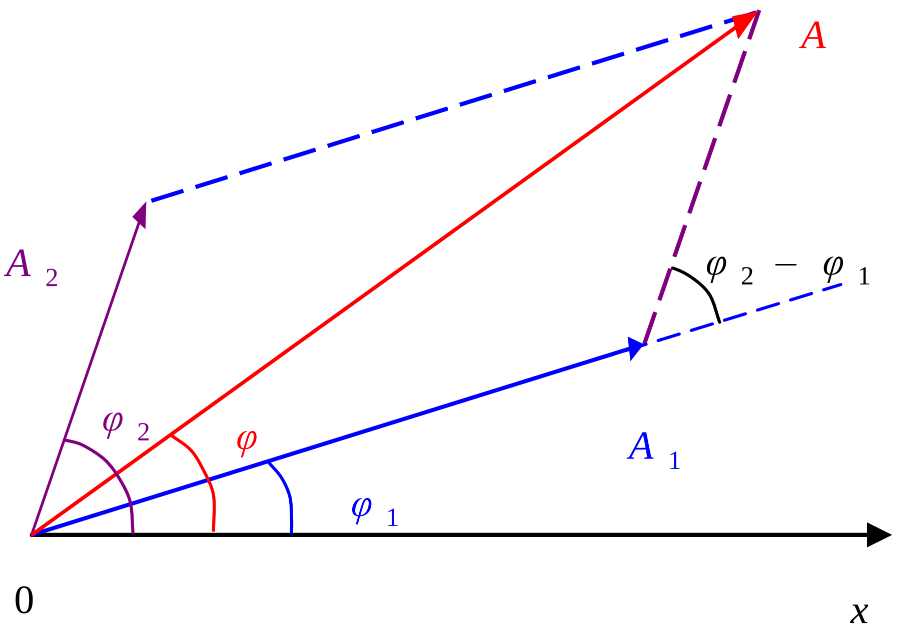


$$x = Acos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad x_0 = Acos\varphi_0$$

Сложение двух одинаково направленных колебаний

- $x_1 = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
- $x_2 = A_2 cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

Разность фаз этих колебаний не зависит от времени, т.е. $(\varphi_1 - \varphi_2)$ = const, такие колебания называются **когерентными**.



Для нахождения результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.

$$x = Acos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$

- Если колебания **синфазны**: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, следовательно, $A = A_1 + A_2$, происходит усиление результирующего колебания.

- Если колебания в **противофазе**: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, следовательно, $A = |A_1 - A_2|$, происходит ослабление результирующего колебания.

- Некогерентные колебания: $\omega_1 \neq \omega_2$, т.е. разность фаз колебаний $(\omega_1 + \varphi_1 - \omega_2 - \varphi_2) \neq \mathrm{const}$ и изменяется стечением времени t.

  При наложении таких колебаний получаются негармоническое результирующее колебание.

Биения

- Если амплитуды двух гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой, одинаковы $A_1 = A_2 = A$, а их частоты мало отличаются друг от друга $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_1$, то результирующее сложение этих колебаний получается с периодически изменяющейся амплитудой $A_б$.

$$x_1 = Acos\omega_0 t$$

$$x_2 = Acos(\omega_0 + \Delta\omega)t$$

- Результат сложения:

$$x = x_1 + x_2 = A(cos\omega_0 t + cos(\omega_0 + \Delta\omega)t)$$

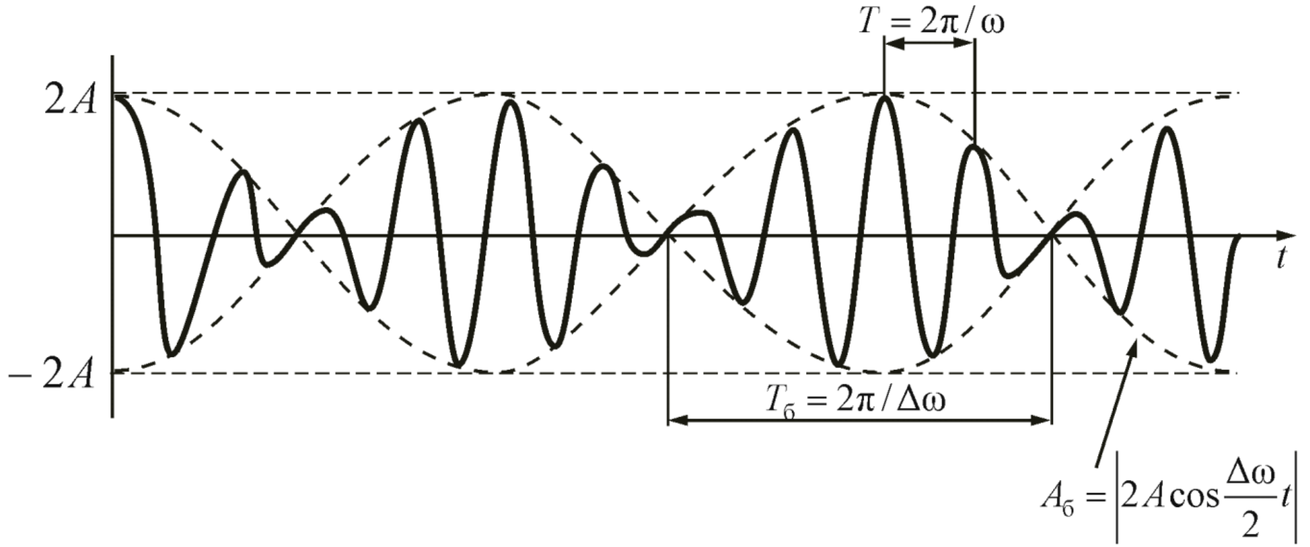
$$= 2Acos\left(\frac{2\omega_0}{2}t + \underbrace{\boxed{\frac{\Delta\omega}{2}}}_{<<\omega_0}t\right)cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}}_{A_б}cos(\omega_0 t)$$

- Периодические изменения амплитуды от минимального значения до максимального называются **биениями**.
- Результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, амплитуда $A_б$ которого изменяется по периодическому закону:

$$A_б = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|$$

Частота изменения $A_б$ в два раза больше частоты изменения косинуса (т.к. берется по модулю), т.е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_б = \Delta\omega$.



Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- **Сложение колебаний с одинаковыми частотами**

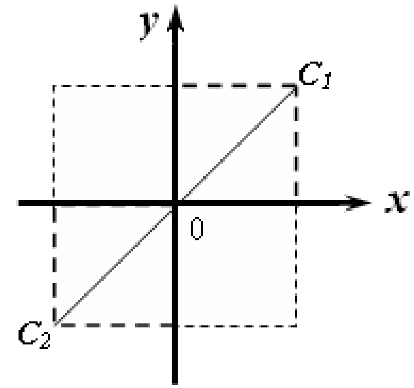
Пусть точка одновременно движется вдоль осей *x* и *y*:

- $x = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
- $y = A_2 cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

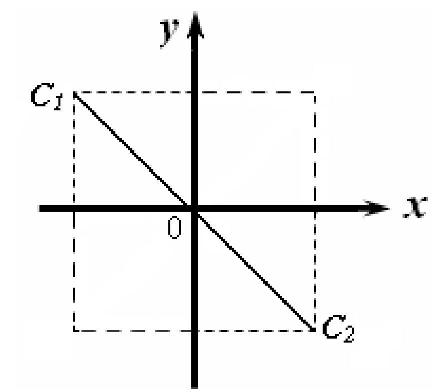
Частные случаи:

- Фазы колебаний равны
- $\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}$ или $y = \frac{A_2}{A_1}x$

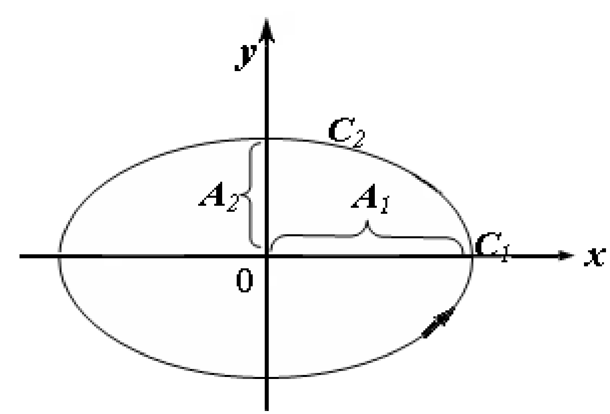


Такие колебания называют линейно-поляризованными.

- Разность фаз равна π
- $\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2}$ или $y = -\frac{A_2}{A_1}x$



- Разность фаз равна $\pi/2$
- $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$



Такие колебания называют эллиптически поляризованными.

- **Сложение колебаний с разными частотами**

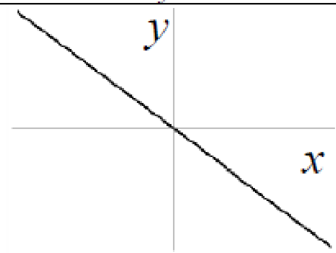
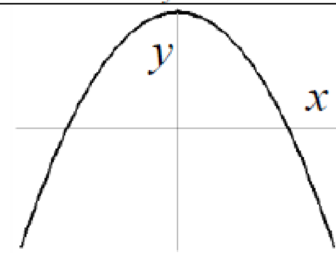
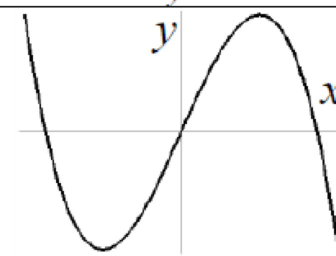
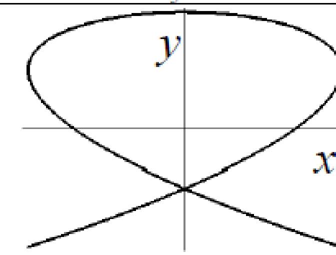
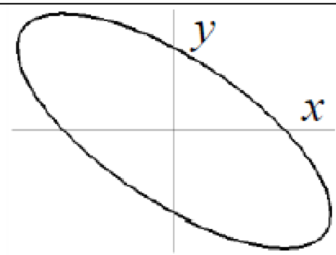
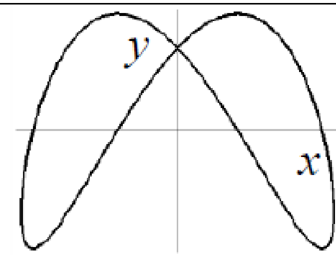
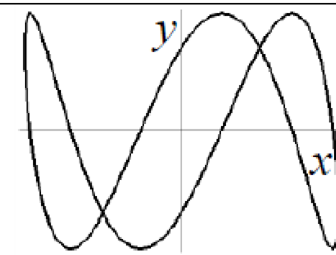
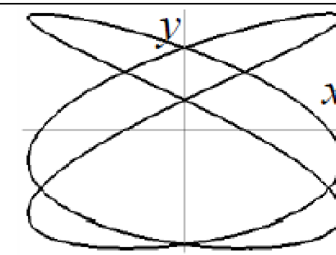
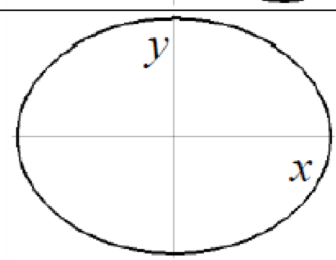
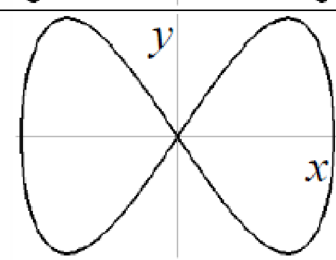
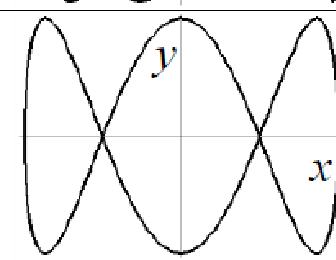
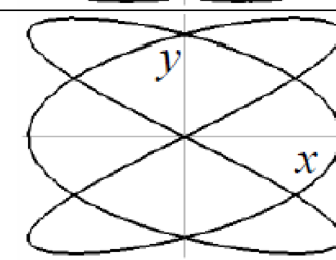
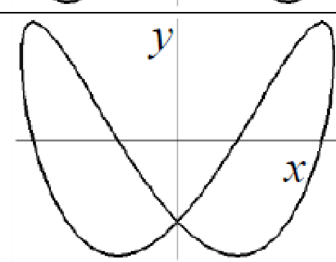
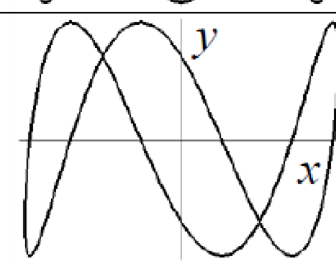
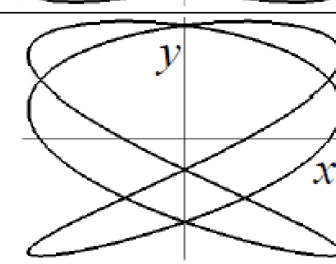
Если частоты складываемых колебаний относятся друг к другу как целые числа, то траектория результирующего движения оказывается замкнутой, а само движение – периодическим.

Прочерчиваемые точкой замкнутые траектории, образующиеся при целочисленных отношениях частот складываемых взаимно-перпендикулярных колебаний называют ***фигурами Лиссажу***.

Вид фигур Лиссажу зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний.

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигуры Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат.

Фигуры Лиссажу, получающиеся при сложении колебаний $x = A_x \cos(\omega_x t)$ и $y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi)$ для различных отношений частот $\omega_x : \omega_y$ при различной начальной разности фаз φ.

	$\omega_x : \omega_y = 1:1$	$\omega_x : \omega_y = 1:2$	$\omega_x : \omega_y = 1:3$	$\omega_x : \omega_y = 2:3$
$\varphi = -\pi$				
$\varphi = -\frac{3}{4}\pi$				
$\varphi = -\frac{1}{2}\pi$				
$\varphi = -\frac{1}{4}\pi$				

Затухающие колебания

- **Затухающие колебания** – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

- Свободные колебания реальной системы всегда затухают. Причиной затухания механических колебаний является трение, электрических колебаний – тепловые потери в проводниках.
- Обычно рассматриваются линейные системы – идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются.

- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0$$

S – колеблющаяся величина,

$\delta = \text{const}$ – коэффициент затухания,

ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы (т.е. в отсутствие потерь энергии, $\delta = 0$).

- Решение уравнения в виде:

$$S = e^{-\delta t}u(t)$$

- Для пружинного маятника массой ***m***, совершающего малые колебания под действием упругой силы, сила трения пропорциональна скорости:
- $F_{\text{тр}} = -rv$, r- коэффициент сопротивления
- Дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- Решение:

$$x = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} sin(\omega t + \varphi_0)$$

где $\frac{r}{2m} = \delta$ – коэффициент затухания

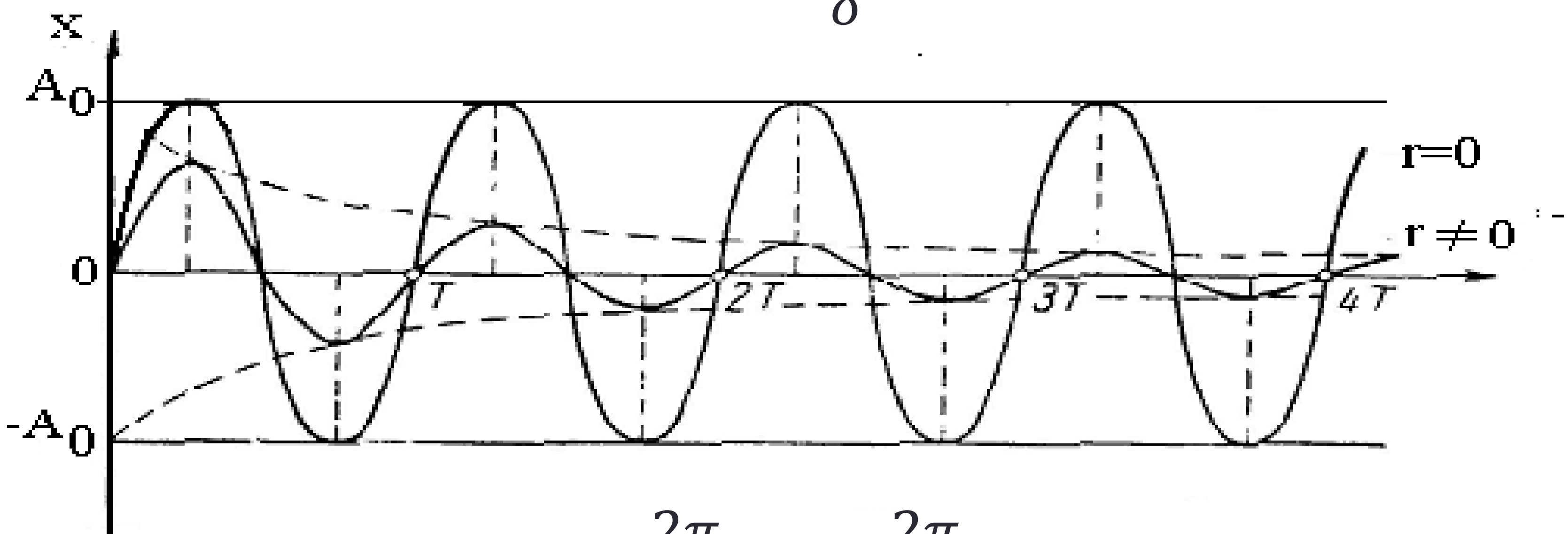
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ - циклическая частота затухающих колебаний

- Амплитуда затухающих колебаний:

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

Промежуток времени τ, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в е раз, называется временем релаксации:

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Декремент затухания:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\Theta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

N_e – число колебаний, совершаемых за время $t = \tau$, в течение которого амплитуда A уменьшается в e раз.

Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$$Q = 2\pi\frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

Вынужденные колебания

- **Вынужденные колебания** – незатухающие колебания, возникающие под действием периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 cos\omega t$$

Для механических колебаний роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 cos\omega t$$

Для простейшего пружинного маятника, на который действует внешняя сила:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 cos\omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos\omega t$$

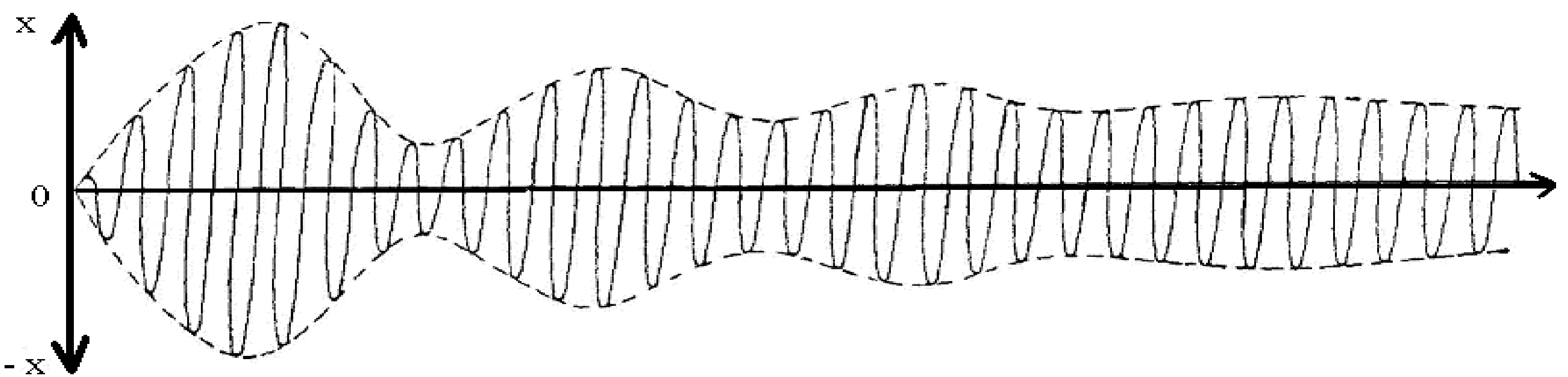
Амплитуда установившихся вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой:

$$\varphi = arctg\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

В установившемся режиме вынужденные колебания являются гармоническими, происходят с частотой внешней гармонической силы.

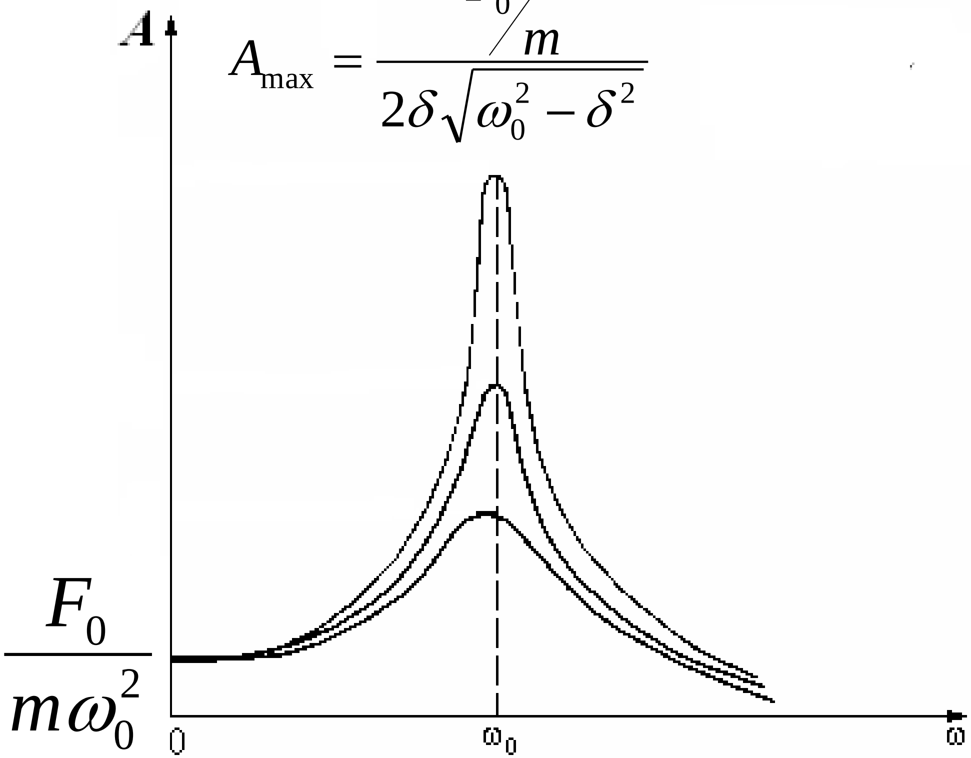


Резонанс

- В случае установившихся колебаний при некоторой частоте внешней силы – ***<u>резонансной частоте</u>*** $\omega_{рез}$ – амплитуда смещения достигает максимального значения:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

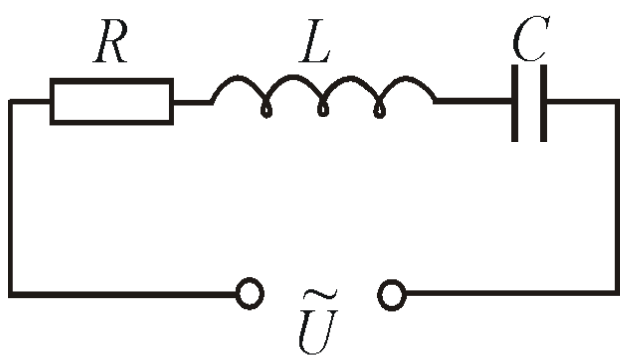


- Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется ***механическим резонансом***.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

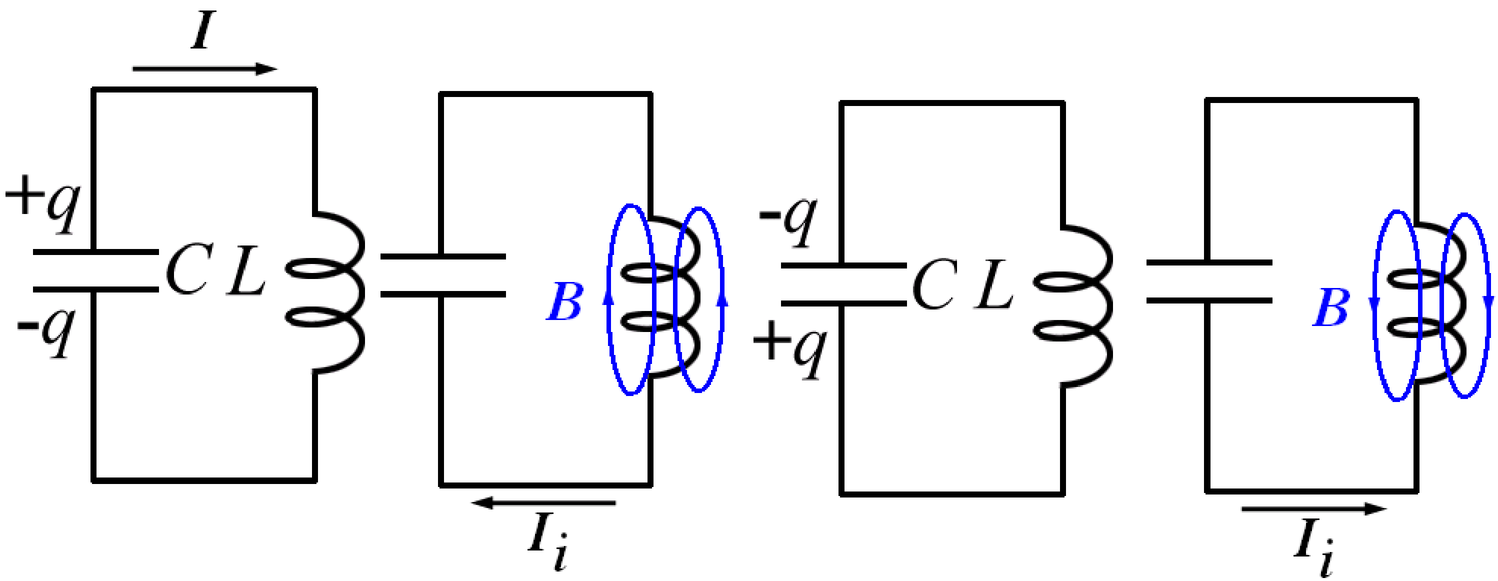
Квазистационарные токи. Колебательный контур.

- Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью равной скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Если l – линейные размеры контура не велики ($l \ll c/\nu$, ν – частота колебаний в контуре), то в каждый момент времени сила тока во всех частях контура одинакова. Такой переменный ток называется квазистационарным.
- Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший ***колебательный контур.***



- Для простейшего колебательного контура $R = 0$.

- При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора *C* в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке. (R = 0)



$$W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_{м.п.} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$$

$$W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_{м.п.} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$$

Энергия электрического поля запасается между обкладками конденсатора C:

$$\boxed{W_{эл.п.} = \frac{Q^2}{2C}.}$$

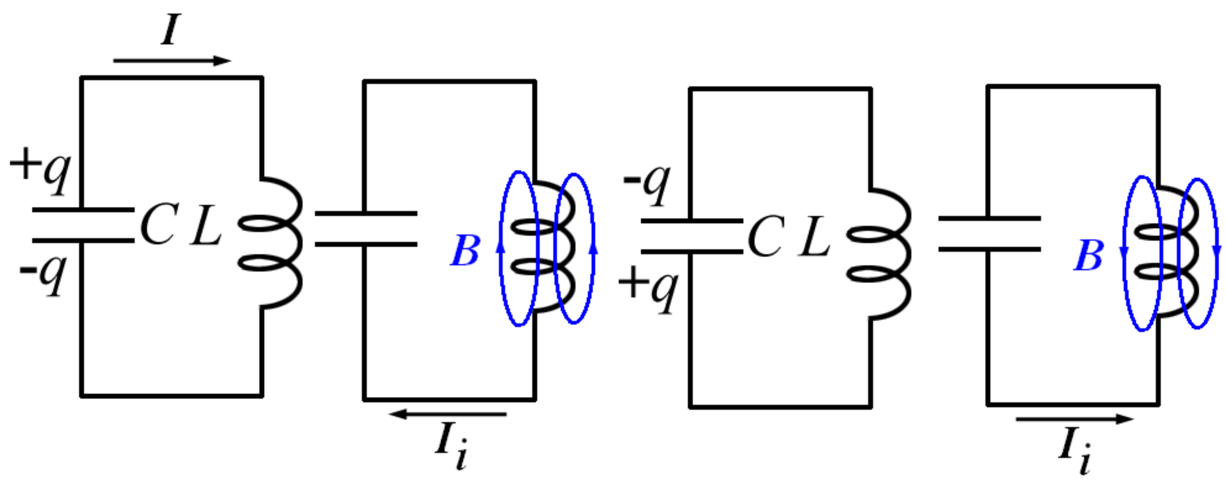
Энергия магнитного поля сосредоточена в катушке L:

$$\boxed{W_{м.п.} = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\dot{Q}^2}{2}.}$$

Если $R \to 0$, тогда полная энергия:

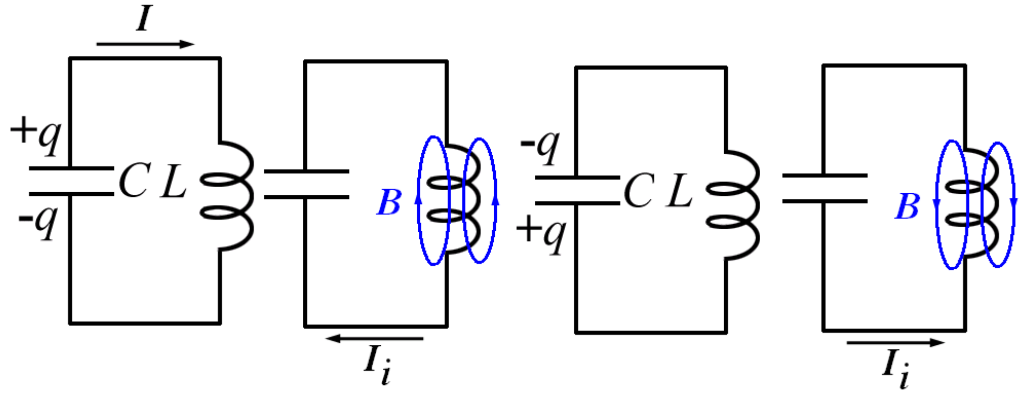
$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = const.}$$

<u>Правило Ленца:</u> индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им переменное магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток, т.е. когда конденсатор C разрядился (энергия магнитного поля и ток в цепи максимальные), то в этот момент ток I начинает убывать.



Следовательно, магнитное поле в катушке ослабевает, и в катушке возникает индукционный ток I_i, который препятствует уменьшению магнитного поля.

Направление I_i совпадает с направлением первоначального тока, и положительные заряды продолжают идти в том же направлении, заряжая положительно другую обкладку конденсатора C.



- Закон Ома для контура: $$\underbrace{IR}_{U_R} + \underbrace{U_C}_{Q/C} = \underbrace{\mathcal{E}_S}_{-L\frac{dI}{dt}}. \qquad (1)$$
- U_C – разность потенциалов (напряжение) на обкладках конденсатора C, $\mathcal{E}s$ – э.д.с. самоиндукции.
- Из закона сохранения заряда следует, что сила квазистационарного тока
- Уравнение (1)

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}. \\ L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q = 0} \qquad (2)$$

дифференциальное уравнение колебаний заряда Q в контуре – дифференциальное ***уравнение затухающих колебаний***.

- $R = 0 \rightarrow$ $$\boxed{\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0}$$

дифференциальное ***уравнение гармонических колебаний***.

Свободные электрические колебания в колебательном контуре являются *гармоническими*.

- Уравнение гармонических колебаний:

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (3)$$

Q_m – амплитуда заряда на конденсаторе C,

ω_0 – собственная частота гармонических колебаний.

- Следовательно: $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$ - формула Томсона.

$$I = \dot{Q} = -\underbrace{\omega_0 Q_m}_{I_m} \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

$$I_m = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}}$$ – амплитуда тока.

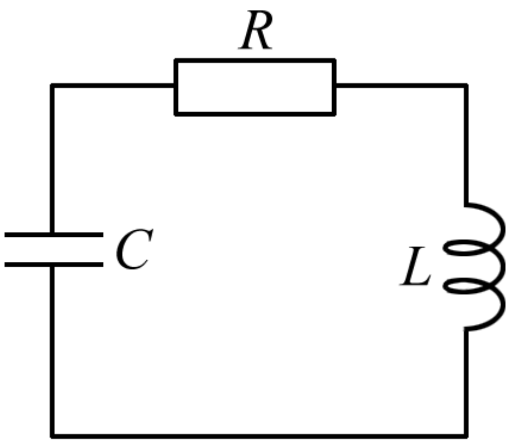
$$U_C = \frac{Q}{C} = \underbrace{\frac{Q_m}{C}}_{U_m} \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) = U_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \qquad (5)$$

$$U_m = \frac{Q_m}{C}$$ – амплитуда напряжения

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что:

- **энергия электрического поля** аналогична потенциальной энергии упругой деформации
- **энергия магнитного поля** аналогична кинетической энергии;
- **Индуктивность** L играет роль массы m
- $1/C$ – роль коэффициента жесткости k
- **Заряду** q соответствует смещение маятника x
- **Силе тока** $I \sim$ скорость υ
- **Напряжению** $U \sim$ ускорение a

Затухающие электрические колебания



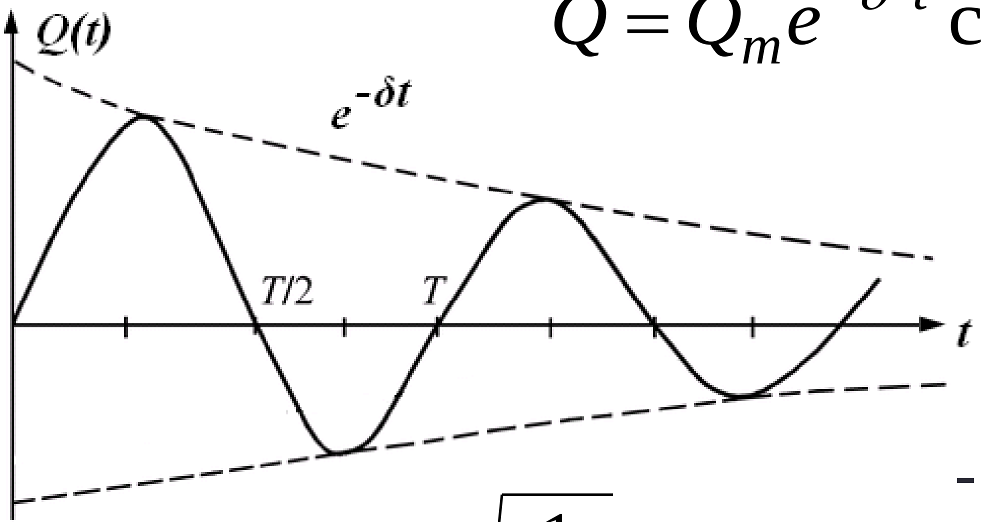
- В реальном контуре $R \neq 0$, следовательно, есть потеря энергии и затухание колебаний, которое характеризуется коэффициентом затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q = 0$$ – дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

$$\boxed{\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.}$$

- Решение: $Q = Q_m e^{-\delta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi),$



$$Q = Q_m e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

- частота затухающих колебаний.

При $R = 0$ $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} = \omega_0$ – собственной частоте контура.

- Логарифмический декремент затухания: $\boxed{\Theta = \ln \dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.}$
- Добротность:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC}\,\dfrac{R}{L}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$W(t)$ – энергия колебательной системы в момент времени t,
$W(t) - W(t+T)$ – убыль энергии за промежуток времени от t до $T+t$.

Вынужденные электрические колебания

- Возникают в контуре при включении внешней э.д.с.

$$U = U_m \cos \omega t. \qquad (1)$$

Закон Ома:

$$IR + \underbrace{U_C}_{Q/C} = \underbrace{\mathcal{E}_S}_{-L\frac{dI}{dt}} + U. \qquad (2)$$

$$\ddot{Q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}\dot{Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q = \underbrace{\frac{U_m}{L}}_{X_0}\cos \omega t \qquad (3)$$

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

- При установившихся вынужденных колебаниях заряд конденсатора колеблется гармонически с циклической частотой внешней э.д.с. – ω

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha), \qquad (4)$$

где α – сдвиг фаз между Q и внешней э.д.с.

$$Q_m = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{4R^2}{4L^2}\omega^2}} =$$

$$= \frac{U_m}{L\sqrt{\frac{\omega^2}{L^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \frac{\omega^2}{L^2}R^2}} = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (5)$$

$$I = \dot{Q} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = \underbrace{\omega Q_m}_{I_m} \cos\left(\omega t \underbrace{- \alpha + \frac{\pi}{2}}_{-\varphi}\right). \qquad (6)$$

$$I_m = \omega Q_m. \qquad (7)$$

Подставив уравнение (5) в уравнение (7), получим

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (8)$$

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

– полное сопротивление цепи.

Из уравнения для внешней э.д.с. (1) и уравнения (6) видно, что между током в контуре I и внешней э.д.с. U есть сдвиг фаз

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

- Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний дает

$$tg\alpha = tg\left(arctg\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} =$$

$$= \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{\omega}{L}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \qquad (10)$$

Из уравнений (9), (10) следует

$$tg\varphi = tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{tg\alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (11)$$

$$tg\varphi = tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\alpha} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (11)$$

ωL – реактивное индуктивное сопротивление,

$\dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

если $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$, то $\varphi > 0$, т.е. ток I отстает по фазе от U,

если $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$, то $\varphi < 0$, т.е. ток I опережает по фазе U.

Уравнение (2) запишем в виде: $$IR+\frac{Q}{C}+L\frac{dI}{dt}=U_m\cos\omega t \qquad (12)\Rightarrow$$

$$U_R+U_C+U_L=U_m\cos\omega t. \qquad (13)$$

Сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней э.д.с.

$$U_R=RI=RI_m\cos\left(\omega t\underbrace{-\alpha+\frac{\pi}{2}}_{-\varphi}\right)=RI_m\cos(\omega t-\varphi). \qquad (14)$$

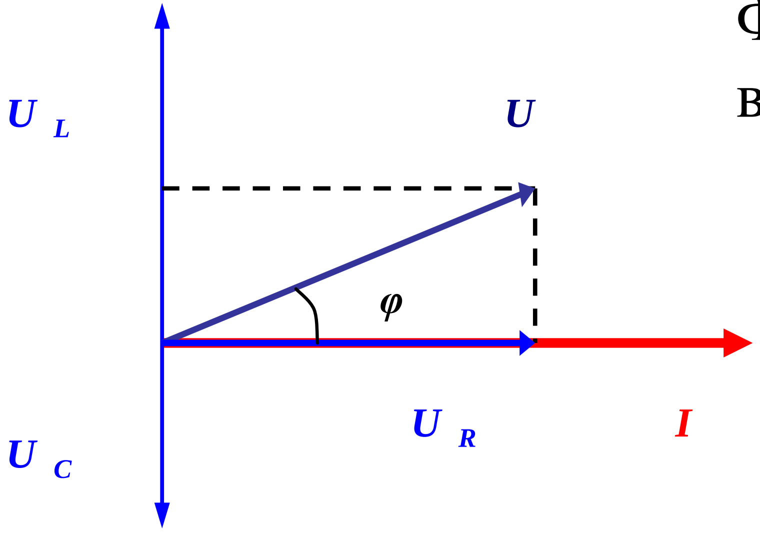
$$U_C=\frac{Q}{C}=\underbrace{\frac{Q_m}{C}}_{U_{Cm}}\cos\left(\omega t-\underbrace{\alpha}_{\varphi+\frac{\pi}{2}}\right)=U_{Cm}\cos\left(\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (15)$$

$$U_{Cm}=\frac{Q_m}{C}=\frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{I_m}{\omega C}. \qquad (16)$$

$$U_L=L\frac{dI}{dt}=-\underbrace{\omega LI_m}_{U_{Lm}}\sin(\omega t-\varphi)=U_{Lm}\cos\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (17)$$

Сравнивая формулы для I, U_R, U_C, U_L , можно сделать вывод, что:

- U_R изменяется в фазе с током I,
- U_C отстает от I, U_R по фазе на π/2,
- U_L опережает I по фазе на π/2.

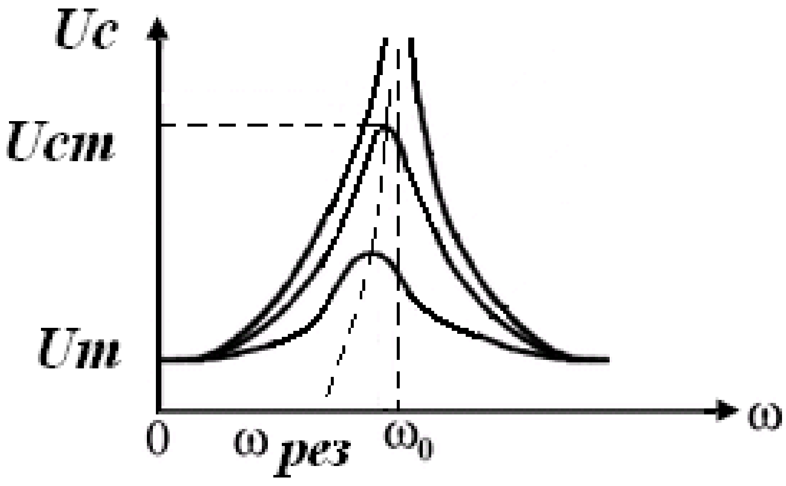


Фазовые соотношения представляются векторной диаграммой

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_L.$$

Резонансная частота для заряда Q и напряжения U_C.

$$\omega_Q = \omega_{Uc} = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \le \omega_0.$$



На рисунке изображены резонансные кривые для напряжения U_C.

$$\delta = \frac{R}{2L}$$ – коэффициент затухания.

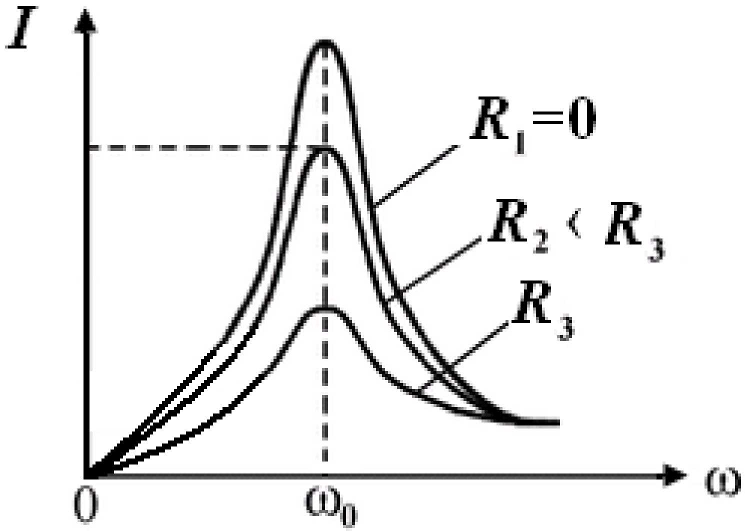
Чем меньше R и больше L, тем выше и острее максимум при резонансе.

$$U_{cm} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Резонанс для тока возникает при $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0.$

В этом случае угол сдвига фаз между током и напряжением $\varphi = 0$ ($tg\varphi = 0$), изменение тока и напряжения происходит синфазно.

$$\omega_I = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$



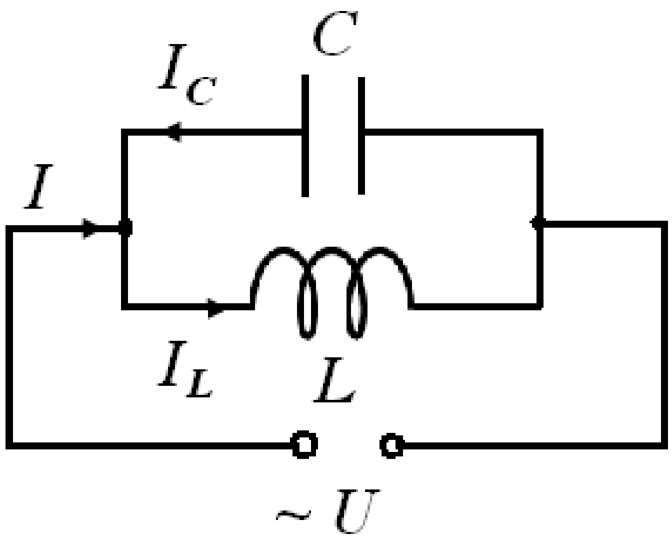
Полное сопротивление цепи Z становится минимальным ($Z = R$), а ток становится максимальным.

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}_{\to 0}}}.$$

Резонансные кривые для тока сходятся в 0, т.к. при постоянном напряжении ($\omega = 0$) ток в цепи, содержащей конденсатор, не течет.

Ток в цепи определяется активным сопротивлением R и принимает максимально возможное при данном U_m значение. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи $U_R = U$, а падение напряжения на конденсаторе U_C и катушке индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется ***резонансом напряжений*** или ***последовательным резонансом***.

- ***Резонанс токов* (*параллельный резонанс*)** наблюдается в цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные конденсатор C и катушку индуктивности L, при приближении частоты приложенного напряжения к резонансной частоте



$$\boxed{\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$$

В этом случае разность фаз токов I_C и I_L в параллельных ветвях $\Delta\varphi = \pi$, т.е. токи в ветвях противоположны по фазе, а амплитуда тока $I = I_m = I_{Cm} + I_{Lm}$ во внешней (неразветвлённой) цепи равно нулю.

Переменный ток

Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей *R*, *L*, *C*, переменного тока, обусловленного переменным напряжением $U = U_m \cos \omega t.$ (1)

Этот ток изменяется по закону $I = I_m \cos(\omega t - \varphi).$ (2)

$$I_m(U_m, C, L, R, \omega) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (3)$$

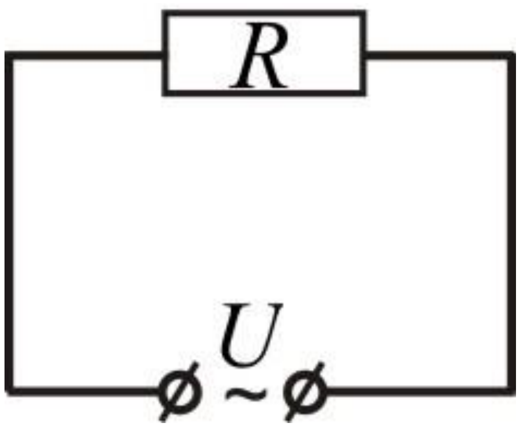
Ток *I* отстает по фазе от напряжения *U* на φ, определяемую выражением

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (4)$$

Полное электрическое сопротивление (импеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (5)$$

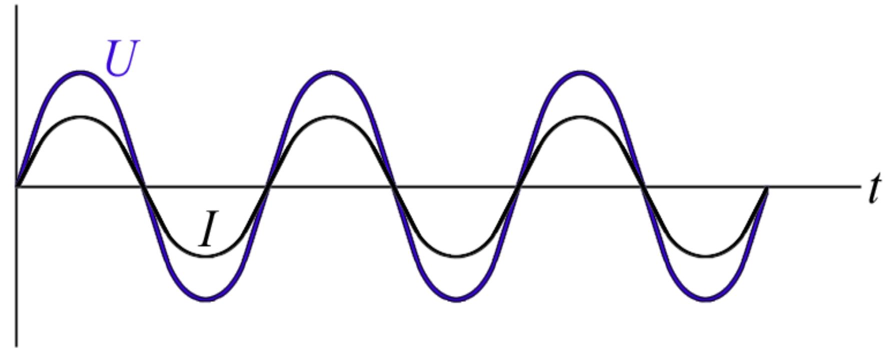
Переменный ток, текущий через R.

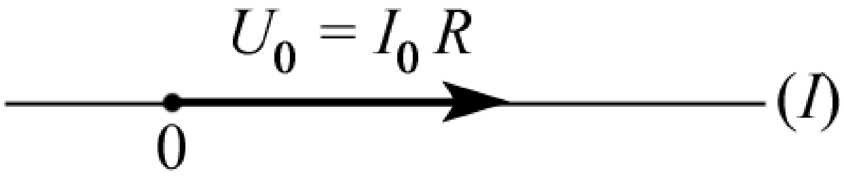


Закон Ома: $IR = U = U_m \cos \omega t.$

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

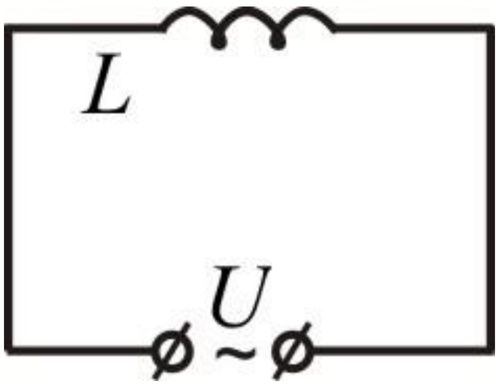
Следовательно, ток изменяется в фазе с напряжением и $\varphi = 0$.





Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:

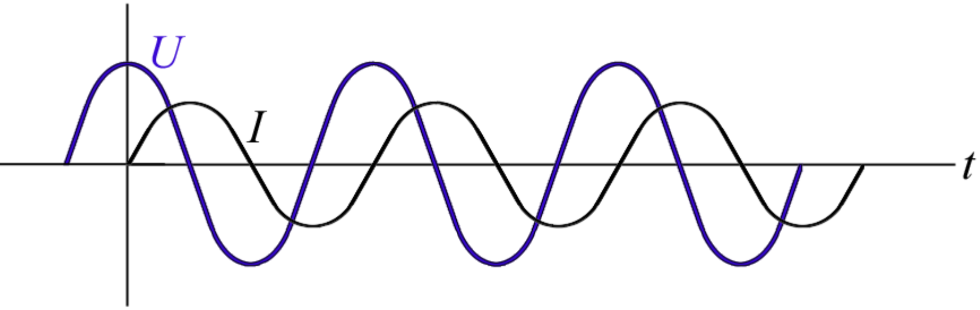
Переменный ток, текущий через L



$R \to 0,\ C \to 0$

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \qquad tg\varphi = \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_L = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

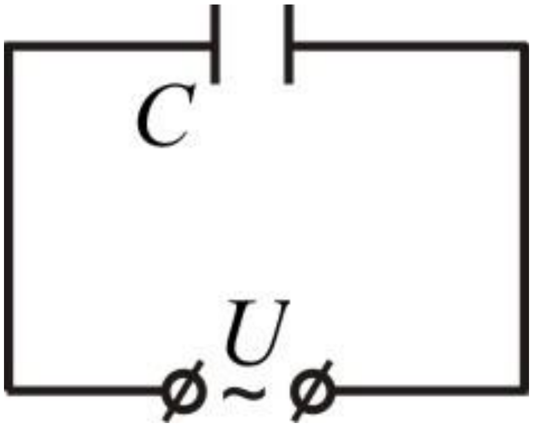


I_L отстает от U_L на π/2.

$$\boxed{R_L = \omega L}$$ – реактивное индуктивное сопротивление.

Постоянному току (ω = 0) индуктивность не оказывает сопротивление.

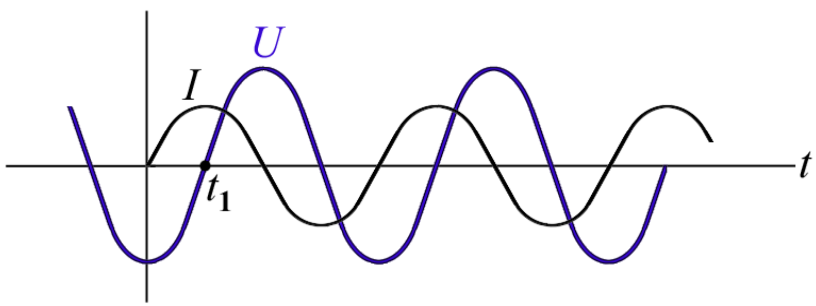
Переменный ток, текущий через С



$R \to 0,\ L \to 0$

$$I_m = \frac{U_m}{\dfrac{1}{\omega C}}, \qquad tg\varphi = -\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

$$I_C = I_m \cos\left(\omega t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$



I_C опережает U_C на π/2

$$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega C}}$$

– реактивное емкостное сопротивление.

При $R = 0$ $$I_m = \frac{U_m}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}.$$

$$\boxed{X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = R_L - R_C}$$ – реактивное сопротивление.

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X^2}}$$ – полное сопротивление.

$$\boxed{tg\varphi = \frac{X}{R}}$$ – фаза:

Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений $U(t)$ и $I(t)$

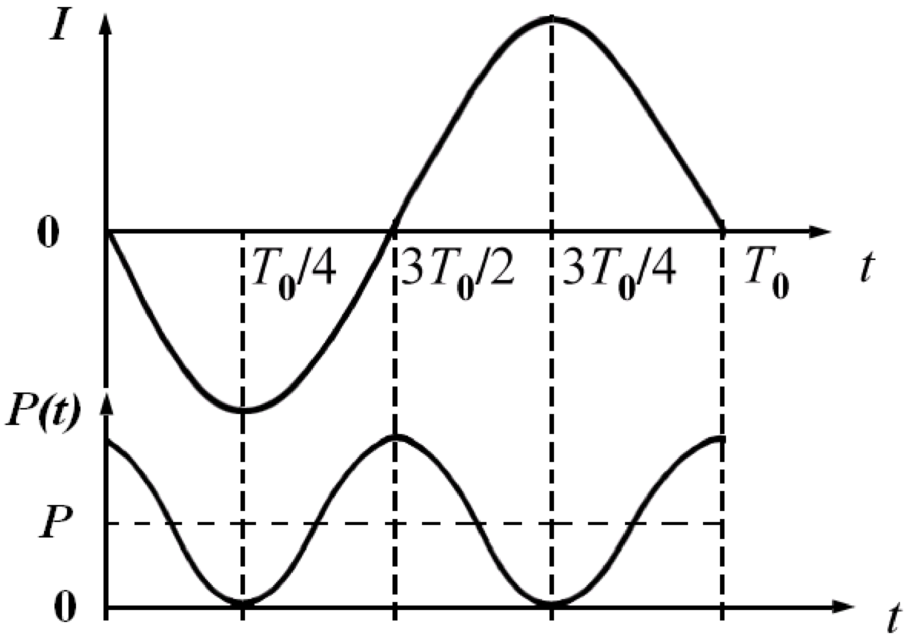
$$\left.\begin{aligned} &P(t)=U(t)\cdot I(t)=U_m\cos\omega t I_m\cos(\omega t-\varphi).\\ &\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}\right\}$$

$$P(t)=\underbrace{\frac{1}{2}U_m I_m\cos\varphi}_{\textit{сред.знач.}}+\frac{1}{2}U_m I_m\cos(2\omega t-\varphi).$$

Среднее значение $\langle\cos(2\omega t-\varphi)\rangle=0.$

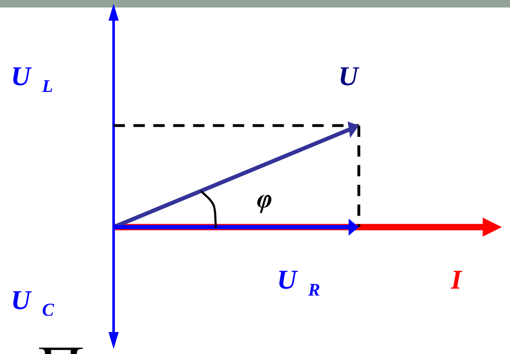
Практическое значение представляет ***среднее значение мощности***

$$\boxed{P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi.}$$



$$P(t) \sim \cos 2\omega t,$$

т.е. мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой в 2 раза превышающей частоту тока.



Из векторной диаграммы видно, что

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{I\cdot R}{I\cdot Z} = \frac{R}{Z}.$$

Подставляем это выражение в формулу для среднего значения мощности:

$$P = \frac{1}{2}\frac{U_m I_m R}{Z} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{U_m}{Z}}_{I_m} I_m R = \frac{RI_m^2}{2}.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна $\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$ – действующее (эффективное) значение силы тока.

Аналогично, $\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$ – действующее значение напряжения.

Уравнение средней мощности можно записать в виде:

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\varphi = UI\cos\varphi.$$

$\cos\varphi$ называется ***коэффициент мощности***.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Распространение колебаний в упругой среде. Поперечные и продольные волны.

- **Волновой процесс (волна)** – процесс распространения колебаний в среде (волны на поверхности жидкости, упругие волны, электромагнитные волны).

- ***Основное свойство волны***: перенос энергии без переноса вещества, т.к. при распространении волны частицы среды не двигаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия.

- Упругая волна называется **продольной**, если частицы среды колеблются в направлении распространении волны.

Продольные волны связаны с объёмной деформацией упругой среды, следовательно, могут распространяться в любой среде – твёрдой, жидкой, газообразной.

- Упругая волна называется **поперечной**, если частицы среды колеблются, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волн.

Они связаны с деформацией сдвига упругой среды, следовательно, распространяются в средах, обладающих упругостью формы, т.е. твёрдых телах.

- **Поверхностные волны** – волны, распространяющиеся вдоль свободной поверхности (жидкости). Возмущения этой поверхности возникают под влиянием внешних воздействий.

- Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t, называются **фронтом волны** (или волновым фронтом).

- Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

- Расстояние λ, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется **длиной волны**.

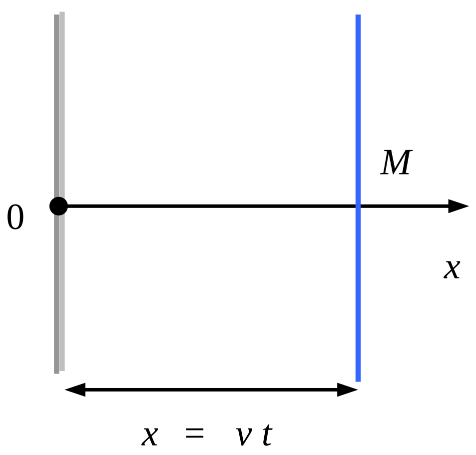
$$\lambda = vT$$

v – скорость волны, T – период колебаний.

- Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π.

Уравнение плоской волны

- Волна называется ***плоской***, если её волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.
- **Уравнение плоской волны распространяющейся вдоль оси *x*.**
- Величина S, характеризующая колебательное движение среды, зависит только от времени t и координаты x.



Колебания в точке M отличаются от колебаний в точке 0 только тем, что они сдвинуты по времени на x/v. Следовательно, S является функцией $(t - x/v)$ и уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль x, принимает вид:

$$\boxed{S = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]}$$

Для характеристики волн используется **волновое число**

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}}$$

Тогда:

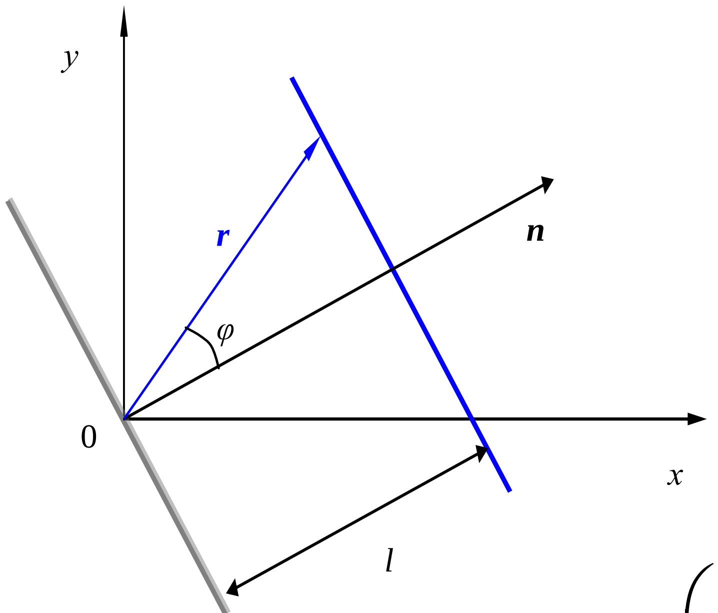
$$\boxed{S = A\cos\left[\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right) + \varphi_0\right] = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0).}$$

- Скорость распространения гармонической волны характеризуется ***фазовой скоростью***. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующих любому фиксированному значению фазы гармонической волны.

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const} \Rightarrow x = \frac{\omega t}{k} + \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

- Это скорость перемещения фазы волны, поэтому её и называют фазовой скоростью.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении.



$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к волновой поверхности,

$$S = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{v}\right) + \varphi_0\right],$$

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = 1\cdot r\cos\varphi = l.$$

$$S = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega\vec{n}\vec{r}}{v} + \varphi_0\right) = A\cos\left(\omega t - \underbrace{k\vec{n}}_{\vec{k}}\vec{r} + \varphi_0\right)$$

$$\boxed{S = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right).}$$

$\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$

Физический смысл имеет только действительная часть комплексной функции $\tilde{S}$: $\mathrm{Re}\tilde{S} = A\cos(\omega t + \varphi).$

$$\boxed{S = Ae^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)}.}$$

Распространение волн в однородной изотропной среде (физические свойства среды одинаковы во всех точках и во всех направлениях) описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое называется ***волновым уравнением***:

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta S = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2},}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$ – оператор Лапласа.

В частности это уравнение описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x:

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.}$$

Энергия упругой волны.

- Рассмотрим продольную плоскую волну в твердой среде:

Деформация среды в плоскости x:

(взят символ частной производной, т.к. $s=s(x, t)$)

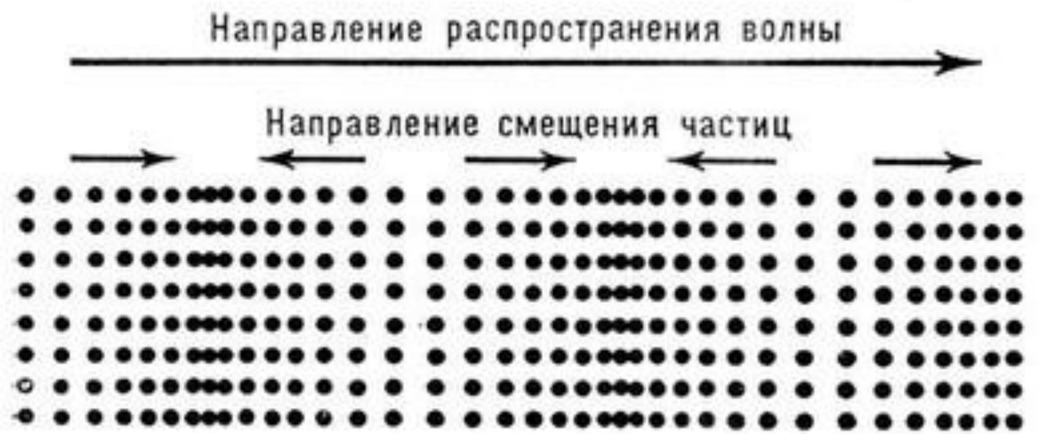
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}}$$

Нормальное напряжение пропорционально деформации (для малых деформаций):

где E – модуль Юнга среды.

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial s}{\partial x}}$$

- В положениях <u>максимального отклонения</u> частиц от положения равновесия ($\partial s/\partial x = 0$) $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$, $\boldsymbol{\sigma = 0}$



- В местах прохождения частиц через положения равновесия **ε, σ - максимальны** (с чередованием ±ε, т.е. растяжений и сжатий)

- **Скорость продольной волны** связана с характеристиками среды следующим образом:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

где ρ – плотность среды.

- **Скорость поперечной волны**:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

где G – модуль сдвига.

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)$$

- – **плотность энергии** упругой волны (как поперечной, так и продольной) в каждый момент времени в разных точках пространства различна.
- Среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega_0^2 .$$

- Скорость переноса энергии волной равна скорости перемещения в пространстве поверхности, соответствующей максимальному значению объёмной плотности волны *w*.

- ***Поток энергии dФw*** сквозь малую площадку dS – отношение энергии dW, передаваемой через эту площадку за малый промежуток времени dt, к его величине dt:

$$\boxed{d\Phi_w = \frac{dW}{dt}.}$$

Поток $$d\Phi_w = \frac{dW}{dt} = w\left(\vec{\upsilon}\, d\vec{S}\right) = \vec{j}\, d\vec{S},$$

где $\boxed{\vec{j} = w\vec{\upsilon}}$ **– вектор плотности потока энергии (вектор Умова)**

- ***Интенсивность волны*** – среднее значение плотности потока энергии, переносимой волной (среднее значение вектора Умова).

$$\boxed{\left\langle \vec{j} \right\rangle = \left\langle w \right\rangle \vec{\upsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega_0^2 \vec{\upsilon}.}$$

- Преобразование энергии волны в другие виды энергии, происходящее при распространении волны в среде, называется ***поглощением волн***.

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x},$$

α – линейный коэффициент поглощения, зависит от свойств среды и частоты волн.

Стоячие волны.

- Две волны называются ***когерентными***, если разность их фаз не зависит от t.

- ***Интерференция волн*** – явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усилие в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

- Частным случаем интерференции волн являются ***стоячие волны*** – волны, образующиеся в результате наложения 2-х бегущих гармонических волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые A и ω.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= A\cos(\omega t - kx), \\ S_2 &= A\cos(\omega t + kx). \end{aligned}\right\}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos kx \cos\omega t = \underbrace{2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}}_{A_{ст}}\cos\omega t.$$

$A_{ст}(x)$ – амплитуда стоячей волны, в отличие от амплитуды бегущей волны, является функцией только координаты

$$A_{ст} = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|.$$

Точки среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$, $A_{ст} = 2A - \max$,

называются ***пучностями***.

Точки среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, $A_{ст} = 0 - \min$,

называются ***узлами***.

Координаты пучностей $x_n = \pm m\frac{\lambda}{2}.$

Координаты узлов $x_{узл} = \pm\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$

Расстояние между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковое и равно $\lambda/2$.

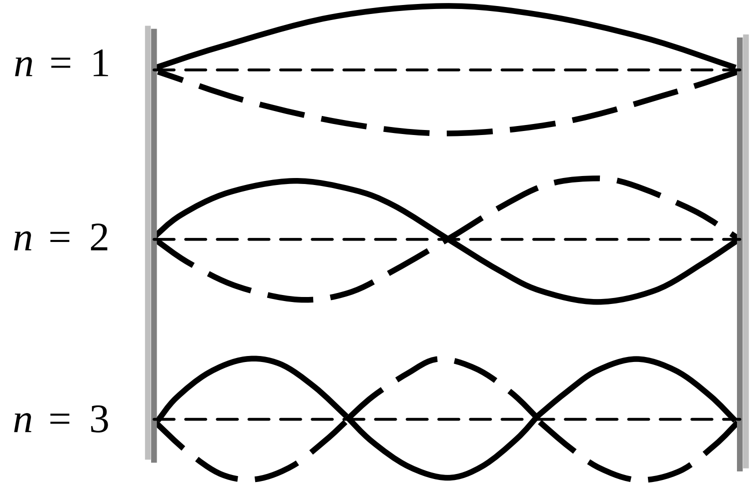
При переходе через узел фаза колебаний меняется на π.

В отличие от бегущей волны у стоячей волны все точки между двумя соседними узлами колеблются с различными A, но с одинаковыми фазами, т.е. ***синфазно*.**

Колебания струны.

- В закреплённой с обоих концов струне устанавливаются стоячие волны. В местах закрепления струны – узлы. Следовательно, в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только колебания, полуволна которых ($\lambda/2$) укладывается на длине струны целое число раз.

$$\boxed{l = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1,2\ldots}$$



v – фазовая скорость волны; определяется силой натяжения и линейной плотностью струны.

$$\boxed{\upsilon_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}n}$$

– собственные частоты, им соответствуют собственные колебания – ***гармоники***.

Звук

- ***Звуковые (акустические) волны*** – упругие волны малой интенсивности.

$f = 16 \div 2\cdot10^4$ Гц – слышимый звук,

$f < 16$ Гц – инфразвук,

$f > 2\cdot10^4$ Гц – ультразвук,

$f > 10^9$ Гц – гиперзвук.

- **Интенсивность звука** (сила звука) – величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны:

$$\boxed{I = \frac{W}{St}, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right].}$$

Интенсивность звука – объективная характеристика звуковой волны.
Чувствительность человеческого уха различна для различных частот, поэтому вводят субъективную характеристику звука, связанную с его интенсивностью, и зависящую от частоты: ***громкость звука*.**

Физиологический закон Вебера – Фехнера: с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону.

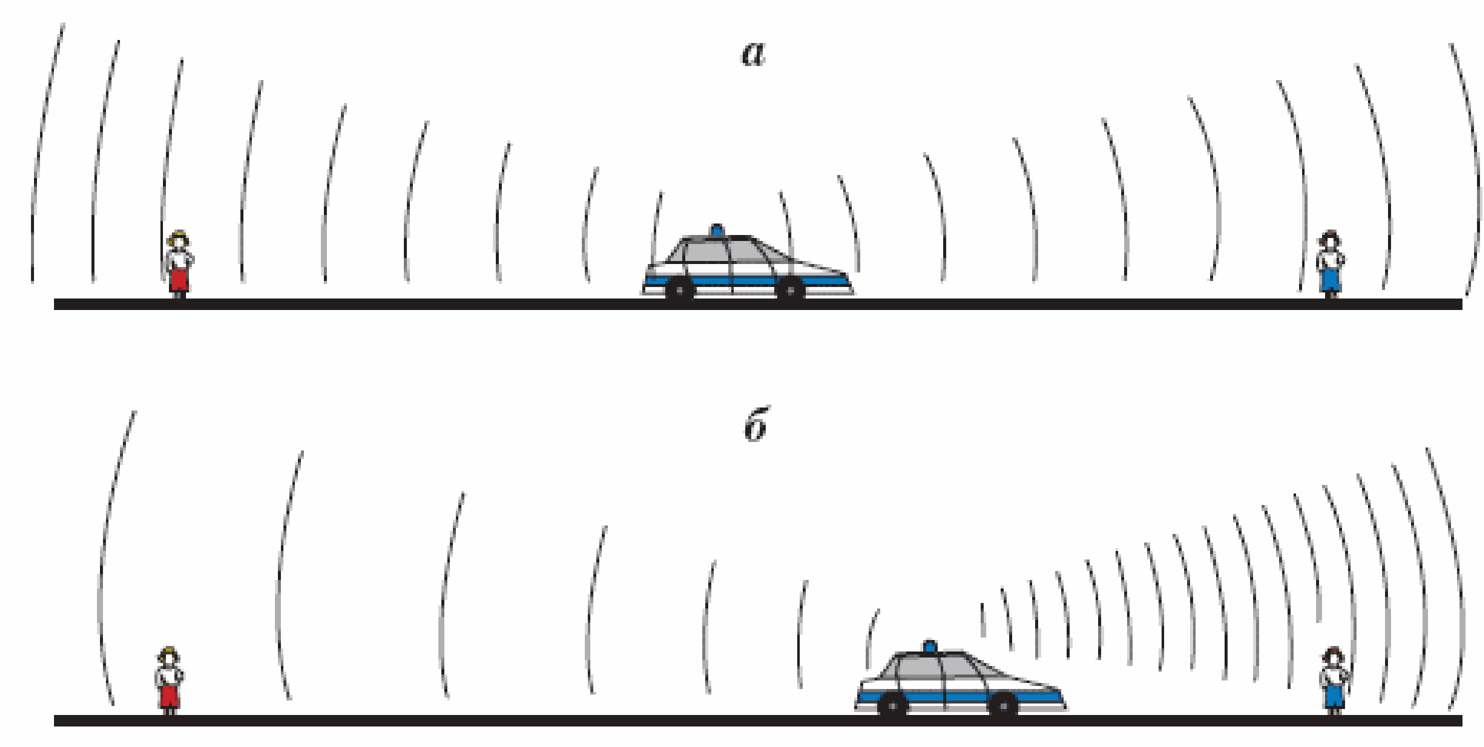
По измеренному значению интенсивности звука (объективная характеристика) вводят объективную оценку громкости звука (субъективная характеристика) – ***уровень интенсивности звука*:**

$$L = lg\frac{I}{I_0}, \quad [\text{бел} = 10 \cdot \text{децибел}],$$

I_0 – интенсивность звука на пределе слышимости, $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2.

Эффект Доплера для звуковых волн.

- **Эффект Доплера** – изменение частоты волн, регистрируемых приёмником, при движении источника волн и приёмника друг относительно друга.



Источник и приёмник покоятся $\upsilon_{ист} = \upsilon_{пр} = 0$.

Длина волны $\lambda_0 = \upsilon T = \dfrac{\upsilon}{\nu_0}$, υ – скорость звука в среде (фазовая скорость).

Частота волн, регистрируемых приёмником: $$\boxed{\nu = \frac{\upsilon}{\lambda_0} = \frac{\upsilon}{\upsilon T} = \nu_0.}$$

Частота звука ν, которую зарегистрирует приемник, равна частоте ν_0, с которой звуковая волна излучается источником.

Приёмник приближается к источнику $\upsilon_{пр} > 0$, $\upsilon_{ист} = 0$.

Длина волны в среде $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{\upsilon}{\nu_0}$.

Скорость распространения волн относительно приёмника равна $\upsilon + \upsilon_{пр}$.

$$\boxed{\nu = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\lambda_0} = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon T} = \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon}\nu_0 = \nu_0\left(1 + \frac{\upsilon_{пр}}{\upsilon}\right) > \nu_0,}$$